Comme F est décroissante sur $]0\,;\frac{1}{2}[$ donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ alors (α_n) est suite décroissante et comme elle est minorée par 0 donc (α_n) est convergente.

Exercice N°18 : 1-a) On a : $I_1 = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}[\ln(t)]dt$

on pose : $\begin{pmatrix} f(t)=\ln t \Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t} \\ g'(t)=\frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow g(t)=2\sqrt{t} \end{pmatrix}$ alors: $I_1 = \left[2\sqrt{t}.\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t}2\sqrt{t}\,dt$

$= 2\sqrt{e} - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{e} - 2\left[2\sqrt{t}\right]_1^e = -2\sqrt{e}+4$

b) $I_{n+1} = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}[\ln(t)]^{n+1}dt$ on pose $\begin{pmatrix} u(t)=[\ln t]^{n+1} \Rightarrow u'(t)=\frac{n+1}{t}(\ln t)^n \\ v'(t)=\frac{1}{\sqrt{t}} \Leftarrow v(t)=2\sqrt{t} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_{n+1} = \left[(\ln t)^{n+1}2\sqrt{t}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)[\ln(t)]^n .2\sqrt{t}dt$ $I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)\underbrace{\int_1^e [\ln(t)]^n .\sqrt{t}dt}_{I_n} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n$.

c) $I_2 = 2\sqrt{e} - 2\times 2I_1 = 2\sqrt{e} - 4(4-2\sqrt{e}) = 10\sqrt{e} - 16$. $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\ln(t)-1\right]^2 dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}\left[(\ln(t))^2 - 2\ln t + 1\right]dt$

$= \int_1^e \left[\frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{\sqrt{t}}\ln t + \frac{1}{\sqrt{t}}\right]dt = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}}dt - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{t}}\ln t\,dt + \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}dt = I_2 - 2I_1 + \left[2\sqrt{t}\right]_1^e$

$= 10\sqrt{e} - 16 - 2(4-2\sqrt{e}) + 2\sqrt{e} - 2 = 16\sqrt{e} - 26$

2-a) On a $1 \le t \le e \Leftrightarrow \ln 1 = 0 \le \ln t \le \ln(e) = 1 \Leftrightarrow 0 \le [\ln(t)]^n \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{[\ln(t)]^n}{\sqrt{t}} \le \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow 0 \le I_n \le \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}dt \Rightarrow 0 \le I_n \le \left[2\sqrt{t}\right]_1^e \Leftrightarrow 0 \le I_n \le 2\sqrt{e} - 2 < \frac{3}{2}$ *donc* $0 \le I_n \le \frac{3}{2}$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e \left[\frac{1}{\sqrt{t}}(\ln(t))^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{t}}(\ln(t))^n\right]dt = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t}}(\ln(t))^n[\ln(t)-1]dt$ on a :

$\forall t \in [1,e]: \frac{1}{\sqrt{t}}[\ln(t)]^n \ge 0$ et $0 \le \ln t \le 1$ d'où $\ln(t)-1 \le 0$. alors d'où $I_{n+1} - I_n \le 0$ et par suite I_n est décroissante, or I_n est minorée par 0 alors elle est convergente .

Qarray.tn Aqra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...